Técnicas de Análise Moderna e Aplicações

O Lema de Fatou, o Lema de Brézis–Lieb e aplicações

Bolsista: Felipe Viglioni

Orientador: Prof. Dr. Olivaine S. de Queiroz

Universidade Estadual de Campinas – Departamento de Matemática

Projeto financiado pelo SAE

Informações para contato:
Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651
Campinas – São Paulo – Brasil
Email: `f106665@dac.unicamp.br`

UNICAMP

IMECC

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar uma generalização do Lema de Fatou, devido a Brézis e Lieb. Fatou nos diz que o limite pontual de uma seqüência de funções Lebesgue–integráveis é também Lebesgue–integrável. Além disso, esse lema fornece uma estimativa para a norma L^1 do limite. Já o Lema de Brézis e Lieb nos dá uma estimativa mais refinada para a norma do limite. De fato, ele nos fornece o termo que falta para obtermos a igualdade na estimativa citada. Nestas notas apresentaremos a demonstração desses dois resultados juntamente com uma aplicação no estudo da Desigualdade de Hardy–Littlewood–Sobolev.

Introdução

O Lema de Fatou, juntamente com o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência Dominada são as principais ferramentas da Teoria da Medida e Integração. Estes resultados são essenciais no estudo de estimativas envolvendo funções Lebesgue–integráveis.

O Lema de Fatou nos diz que se uma seqüência de funções Lebesgue–integráveis $\{f^j\}$ converge pontualmente para alguma função f, então esta também é Lebesgue–integrável e

$$\liminf_{j\to\infty}\int_\Omega f^j(x)\mu(dx) \ge \int_\Omega f(x)\mu(dx). \qquad (1)$$

É interessante que nos perguntemos se é possível chegar em uma igualdade na expressão (1). A resposta é afirmativa. De fato, o teorema elaborado por Haïm Brézis e Elliott Lieb em [1] nos diz que existe um termo que quando adicionado à desigualdade (1), esta torna-se uma igualdade. A expressão obtida é a que se segue:

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \big||f^j(x)|-|f^j(x)-f(x)|\big|\mu(dx) = \int_\Omega |f(x)|\mu(dx). \qquad (2)$$

Resultados importantes

Iremos apresentar dois resultados importantes em Teoria da Medida que são necessários para o estudo do Lema de Fatou e, conseqüintemente, o Lema de Brézis–Lieb.

Teorema da Convergência Monótona

Seja $f^1, f^2, \ldots$ uma seqüência crescente de funções somáveis em (Ω, Σ, μ), tal que

$$f(x) := \lim_{j\to\infty} f^j(x)$$

e

$$I := \lim_{j\to\infty} I_j := \lim_{j\to\infty}\int_\Omega f^j d\mu.$$

Então f é mensurável e, mais ainda, I é finita se, e somente se, f é somável. Em outras palavras:

$$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega f^j(x)\mu(dx) = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} f^j(x)\mu(dx). \qquad (3)$$

Teorema da Convergência Dominada

Seja $\{f^j\} \subset (\Omega, \Sigma, \mu)$ uma seqüência de funções somáveis e assuma que $f^j \to f$ pontualmente. Se existir uma função $G(x)$ no supracitado espaço de medida tal que $|f^j(x)| \le G(x)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $|f(x)| \le G(x)$ e

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega f^j(x)\mu(dx) = \int_\Omega f(x)\mu(dx).$$

Lema de Fatou

Enunciado

Seja $\{f^j\}$ uma seqüência de funções não-negativas em (Ω, Σ, μ). Então a função

$$f(x) := \liminf_{j\to\infty} f^j(x)$$

é mensurável e

$$\liminf_{j\to\infty}\int_\Omega f^j(x)\mu(dx) \ge \int_\Omega f(x)\mu(dx). \qquad (4)$$

Demonstração

Defina $F^k(x) = \inf_{j\ge k} f^j(x)$. Pelas propriedades de Σ–Álgebra, temos que o

$$\{x : F^k(x) \ge t\} = \bigcap_{j\ge k}\{x : f^j(x) \ge t\}$$

é um elemento de Σ.

Podemos ver que $F^k(x)$ é mensurável para todo $k \in \mathbb{N}$, já que sendo F^k o ínfimo das f^j, F^k é então somável, não-negativa e

$$\int F^k d\mu < \infty,$$

para todo k natural. A seqüência é claramente crescente. Portanto, seu limite é dado pelo supremo. Sabemos o seguinte fato geral:

$$\inf_j \int h^j \ge \inf_j \int \inf_j h^j. \qquad (5)$$

Então, temos:

$$\begin{aligned}\liminf_{j\to\infty}\int_\Omega f^j(x)\mu(dx) &:= \sup_{k\ge1}\inf_{j\ge k}\int_\Omega f^j(x)\mu(dx)\\ &\ge \sup_{k\ge1}\inf_{j\ge k}\int_\Omega \inf_j f^j(x)\mu(dx)\\ &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega F^k(x)\mu(dx)\\ &= \int_\Omega f(x)\mu(dx).\end{aligned}$$

A última igualdade segue do Teorema da Convergência Monótona. □

Lema de Brézis–Lieb

Enunciado

Seja $\{f^j\}$ uma seqüência de funções em (Ω, Σ, μ) que convirja pontualmente para uma função f, que, como já vimos, também é mensurável. Assuma que as f^j's são uniformemente somáveis à p–ésima potência, para algum $p \in (1, \infty)$ fixado, isto é,

$$\int_\Omega |f^j(x)|^p\mu(dx) < \infty, \forall j \in \mathbb{N}$$

Então

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \big||f^j(x)|^p - |f^j(x)-f(x)|^p - |f(x)|^p\big|\mu(dx) = 0. \qquad (6)$$

Demonstração

Afirmação 1. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\big||a+b|^p - |b|^p\big| \le \varepsilon|b|^p + \delta|a|^p. \qquad (7)$$

Demonstração da Afirmação 1. A função $t \mapsto |t|^p$ é convexa quando $p > 1$. Por isso

$$|a+b|^p \le (|a|+|b|)^p \le (1-\lambda)^{1-p}|a|^p + \lambda^{1-p}|b|^p,$$

para todo $\lambda \in (0,1)$. A escolha $\lambda = (1+\varepsilon)^{\frac{-1}{p-1}}$ resulta em (7).

Escrevamos $f^j = f + g^j$, então $g^j \to 0$ pontualmente (q.t.p.) pelas hipóteses. Defina também:

$$\overline{G^j_\varepsilon} := \big||f+g^j|^p - |g^j|^p - |f|^p\big| - \varepsilon|g^j|^p \qquad (8)$$

Defina então G^j_ε como a parte positiva de (8): $G^j_\varepsilon := (\overline{G^j_\varepsilon})_+$.

A seguir iremos mostrar que $\lim_{j\to\infty}\int G^j_\varepsilon = 0$. Para tanto, notemos que, utilizando (7),

$$\begin{aligned}\overline{G^j_\varepsilon} + \varepsilon|g^j|^p &= \big||f+g^j|^p - |g^j|^p - |f|^p\big|\\ &\le \big||f+g^j|^p - |g^j|^p\big| + |f|^p\\ &\le \varepsilon|g^j|^p + (1+\delta)|f|^p.\end{aligned}$$

Logo, como $1+\delta > 0$ e f é não-negativa, temos que $G^j_\varepsilon \le (1+\delta)|f|^p$. Segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{j\to\infty}\int G^j_\varepsilon = \int \lim_{j\to\infty} G^j_\varepsilon = 0. \qquad (9)$$

A definição de G^j_ε nos diz que $\big||f+g^j|^p - |g^j|^p - |f|^p\big| \le \varepsilon|g^j|^p + G^j_\varepsilon$.

Integrando ambos os lados da desigualdade acima obtemos

$$\int \big||f+g^j|^p - |g^j|^p - |f|^p\big| \le \int \varepsilon|g^j|^p + \int G^j_\varepsilon. \qquad (10)$$

Precisamos mostrar que $\int |g^j|^p \le C$, para alguma constante $C > 0$.

Afirmação 2. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e todo $p > 0$, temos que

$$|a+b|^p \le 2^p|a^p + b^p|. \qquad (11)$$

Demonstração da Afirmação 2. Basta notar que $|a+b|^p \le |2\sup\{a,b\}|^p = 2^p|\sup\{a,b\}^p| \le 2^p|a^p + b^p|$.

Utilizando a Afirmação 2 estimamos:

$$\begin{aligned}\int |g^j|^p &= \int |f - f^j|^p\\ &\le 2^p\int(|f^j|^p + |f|^p)\\ &\le 2^{p+1}C = \overline{C}.\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $j \to \infty$ em (10) temos:

$$\int \big||f+g^j|^p - |g^j|^p - |f|^p\big| \le \varepsilon\overline{C} \in \mathbb{C}.$$

Como ε é arbitrário, o teorema está demonstrado. □

Aplicação

Consideremos o *operador integral* $A : L^p \to L^q$ dado por

$$Af := \int |x-y|^{-\lambda}f(y)dy, \qquad (12)$$

onde $0 < \lambda < n$ e $p^{-1} + \lambda/n = 1 + q^{-1}$.

É um fato conhecido de Análise Funcional que o operador A está bem definido e é limitado no seguinte sentido: existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|Af\|_q \le K\|f\|_p, \quad \text{para qualquer } f \in L^p. \qquad (13)$$

Uma questão central na teoria de Equações Diferenciais Parciais e em Cálculo de Variações é a seguinte: *é possível encontrar f de forma que a igualdade em (13) seja atingida?*

Consideremos a expressão

$$R(f) := \frac{\|Af\|_q}{\|f\|_p},$$

e seja $K := \sup\{R(f) : f \in L^p, f \ne 0\}$. Com esta notação, a questão acima pode ser reformulada da seguinte maneira: *existe $f \in L^p$ que maximiza $R(f)$, isto é, tal que $R(f) = K$?*

É também conhecido, desde os cursos básicos de Cálculo, que um problema de maximização ou minimização depende crucialmente de resultados de compacidade.

Apresentaremos aqui as idéias desenvolvidas em [4] para demonstrar a existência de função com as propriedades descritas acima, mostrando assim que o Lema de Brézis–Lieb é uma ferramenta importante que substitui a compacidade em certos problemas.

Vamos assumir que

$$1 \le p \le q < \infty.$$

Suponha que exista uma seqüência limitada f_n em L^P de modo que

i) $R(f_n) \to K$;
ii) $f_n \to f$ q.t.p.;
iii) $f \ne 0$;

A demonstração da existência de uma sequência com estas propriedades pode ser encontrada em [3] ou em [4] e será objetivo de estudos futuros.

Assumindo a existência de uma tal sequência, a dificuldade está em demonstrar que $R(f) = K$. Essa dificuldade pode ser resolvida pelo Lema de Brézis–Lieb se assumirmos adicionalmente que $Af_n \to Af$ q.t.p.

Com essas hipóteses temos que:

$$K^p = \lim_{n\to\infty}\frac{\|Af_n\|_q^p}{\|f_n\|_p^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\|Af\|_q^q + \|Ag_n\|_q^q)^{\frac{p}{q}}}{\|f\|_p^p + \|g_n\|_p^p} \qquad (14)$$

com $f_n := f + g_n$. Como $p/q \le 1$ e $(a+b)^t \le a^t + b^t$ para $a, b \ge 0$ e $t \le 1$, e $\|Ag_n\|_q \le K\|g_n\|_p$, pela limitação do operador, segue que

$$K^p \le \frac{\|Af\|_q^p}{\|f\|_p^p}. \qquad (15)$$

Assim, f maximiza a desigualdade, como desejado.

Referências

[1] Brézis, H. e Lieb, E. A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals. *Proceedings of American Mathematical Society*, Vol. **88**, No. 3, 486–490.

[2] Folland, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* Second Edition. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. 1999

[3] Lieb, E.H. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. *Ann. of Math.* (2) **118**, (1983), no. 2, 349–374.

[4] Lieb, E. e Loss, M. *Analysis.* Second edition. Graduate Studies in Mathematics, **14**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.