O Método do Referencial Móvel

Aluno: Marcelo Antunes Soares Fantini
RA: 108341 - Bacharelado em Matemática
marcelo.asfantini@gmail.com

Orientador: Rafael Leão
IMECC - Departamento de matemática
leao@ime.unicamp.br

Introdução

Se tivermos uma curva em $\mathbb{R}^3$ suficientemente regular sabemos que podemos descrevê-la em termos do conhecido ***triedro de Frenet-Serret***. Sendo T, N, B os vetores tangente, normal e binormal, respectivamente, κ a curvatura e τ a torção da curva, as equações do triedro são:

$$\begin{cases} T' = \kappa N, \\ N' = -\kappa T + \tau B, \\ B' = -\tau N. \end{cases}$$

Em cada ponto da curva temos uma forma natural de associar um referencial $\mathbb{R}^3$, cujas equações que descrevem a variação deste referencial ao longo da curva definem duas características invariantes, a curvatura e a torção. Além disso, a curvatura e torção classificam curvas em $\mathbb{R}^3$ no sentido que curvas com mesma curvatura e torção são as mesmas a menos de um movimento rígido.

Queremos transferir este estudo para outros objetos mas dificuldades começam a aparecer, uma vez que não existe maneira direta de associar um referencial a cada ponto. Logo, precisamos refinar nossas noções a respeito de campos de vetores, de como diferenciá-los e do que é um referencial. Encontraremos as ideias de fibrados vetoriais e conexões, entenderemos vetores tangentes como seções do fibrado tangente e a derivada covariante usual se traduzirá como diferenciação desta seção. Em $\mathbb{R}^3$ isto é feito usando derivadas direcionais, mas a generalização para conexões é nos permite estudar o caso das superfícies e de objetos mais gerais. Veremos a necessidade de introduzir os símbolos de Christoffel como o mecanismo que descreve os referenciais em analogia às equações de Frenet-Serret.

Fibrados Vetoriais

Definição

Seja M uma variedade suave. Um ***fibrado vetorial (real) de posto*** k ***sobre*** M é uma variedade suave E juntamente com uma aplicação sobrejetiva suave $\pi : E \to M$ satisfazendo duas propriedades:

1. Para cada $p \in M$, o conjunto $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ (chamada a ***fibra*** de E sobre p) é equipada com a estrutura de um espaço vetorial real k-dimensional.
2. Para cada $p \in M$, existem uma vizinhança U de p em M e um difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (chamado uma ***trivialização local*** de E sobre U), tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

(onde π_1 é a projeção no primeiro fator); e tal que para cada $q \in U$, a restrição de Φ a E_q é um isomorfismo linear de E_q para $\{q\} \times \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^k$.

Exemplos

1. O primeiro exemplo de fibrado é o fibrado vetorial trivial: temos uma única trivialização $\Phi : \pi^{-1}(M) \to M \times \mathbb{R}^k$ de E sobre M.
2. Seja M uma variedade suave de dimensão n. Então seu fibrado tangente TM é um fibrado vetorial. Dado $p \in M$, a fibra sobre p é T_pM. As seções suaves são os campos de vetores definidos num aberto.
3. Analogamente, o fibrado cotangente T^*M sobre a variedade M também é um fibrado vetorial de posto n. Se p é um ponto de um conjunto aberto de M então a fibra sobre p é $T_p{}^*M$. Assim, as seções de T^*M são as 1-formas diferenciais.
4. Como exemplo de fibrado não trivial, a faixa de Möbius pode ser vista como um fibrado vetorial com fibra típica $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{S}^1$.

Conexões em Fibrados Vetoriais

Definição

Suponha que $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial suave de posto m e que $\sigma : M \to E$ é uma seção deste fibrado. Uma ***conexão*** em E é uma aplicação $\nabla : \mathcal{X}(M) \to \Gamma(E)$, onde $\mathcal{X}(M)$ é o conjunto de todos os campos de vetores suaves em M e $\Gamma(E)$ é o conjunto de todas as seções suaves em E, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. (Regra de Leibniz) Para todo $h \in C^\infty(M)$ e todo campo , temos que
$$\nabla_X(h\sigma) = h\,(\nabla_X\sigma) + (X(h))\sigma.$$
2. Linearidade na primeira coordenada:
$$\nabla_{hX}(\sigma) = h\,(\nabla_X\sigma)\,.$$
3. Aditividade em ambas coordenadas:
$$\nabla_{X_1+X_2}(\sigma) = \nabla_{X_1}(\sigma) + \nabla_{X_2}(\sigma),\ \nabla_X(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla_X(\sigma_1) + \nabla_X(\sigma_2).$$

O Método do Referencial Móvel

Suponha que M é uma m-variedade suave conexa e G é um grupo de Lie r-dimensional. Geometricamente, o grupo de Lie é uma superfície e sua álgebra de Lie é o espaço tangente da identidade. Podemos considerar a translação à direita R_g como uma aplicação de G em G, logo a diferencial $dR_g : T_gG \to T_eG$, onde T_gG é o espaço tangente do grupo de Lie G no ponto g, pode ser vista como uma 1-forma com valores na álgebra de Lie. Escolhendo uma base $\{\delta^1, \ldots, \delta^n\}$ do espaço T_eG para obter a descrição através de coordenadas, esta é a forma de Maurer-Cartan e escrevemos

$$w(x) = dR_g(X)$$
$$\sum w_i(x)\delta^i.$$

Portanto, é possível mostrar que elas satisfazem

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} c^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k,$$

onde os c^i_{jk} são as constantes de estrutura da álgebra de Lie com relação à base $\{\delta^1, \ldots, \delta^n\}$.

Teorema 1

Suponha que existem r 1-formas diferenciais $\psi^i (1 \le i \le r)$ em M que satisfazem as equações

$$d\psi^i = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\,\psi^j \wedge \psi^k,$$

onde os c^i_{jk} são as constantes de estrutura de um grupo de Lie G. Então para todo ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U e uma aplicação suave $f : U \to G$ tal que

$$f^*\omega^i = \psi^i,$$

onde ω^i é uma forma diferencial fundamental à direita de G. Se f_1, f_2 são quaisquer duas aplicações, então existe um elemento g em G tal que

$$f_2 = R_g \circ f_1,$$

isto é, as imagens de f_1 e f_2 diferem por apenas uma translação à direita de G.

Teorema Fundamental para Referenciais Móveis em $\mathbb{R}^n$

Suponha que ψ_α e $\psi_{\beta\gamma} = -\psi_{\gamma\beta} (1 \le \alpha, \beta, \gamma, n)$ são 1-formas diferenciais dependendo em n variáveis. Então existe uma família de referenciais ortogonais dependendo em n parâmetros e tendo as dadas formas diferenciais como suas componentes relativas se e somente se as formas diferenciais satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{cases} d\psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \psi_\beta \wedge \psi_{\beta\alpha}, \\ d\psi_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n} \psi_{\alpha\gamma} \wedge \psi_{\gamma\beta}. \end{cases}$$

Além disso, quaisquer duas famílias de referenciais ortogonais estão relacionadas por um movimento rígido em $\mathbb{R}^n$.

Teoria de Superfícies

Coloque um referencial ortogonal $(p; e_1, \ldots, e_n)$ em todo ponto p em M tal que e_i é um vetor tangente de M em p, e_A é um vetor normal de M em p, $(e_1, \ldots, e_n)$ tem a mesma orientação que M, e $(e_1, \ldots, e_n)$ tem a mesma orientação que o referencial $(O; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ em $\mathbb{R}^n$. Chamaremos tal referencial ortogonal um ***referencial de Darboux*** na subvariedade M. Sempre existe um referencial de Darboux em uma vizinhança suficientemente pequena de todo ponto em M.

Utilizando um referencial de Darboux temos uma decomposição dos vetores em componentes tangentes e componentes normais. Num ponto p em M do referencial, se e_i é um vetor tangente de M em p então $dp = \sum_{i=1}^m w_i e_i$. Assim $I = dp \cdot dp = \sum_{i=1}^m (w_i)^2$ é a primeira forma fundamental.

Equação de Gauss: $R_{ijkl} = \sum_{A=m+1}^n (h_{Ail}h_{Ajk} - h_{Aik}h_{Ajl})$, ***Equações de Codazzi:*** $d\omega_{iB} = \sum_{k=1}^m \omega_{ik} \wedge \omega_{kB} + \sum_{A=m+1}^n \omega_{iA} \wedge \omega_{AB}$, $d\omega_{AB} = \sum_{k=1}^m \omega_{Ak} \wedge \omega_{kB} + \sum_{A=m+1}^n \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}$.

Teorema de hipersuperfícies

Suponha que existem duas 2-formas diferenciais

$$\mathrm{I} = \sum_{i=1}^{m} (w_i)^2, \quad \mathrm{II} = \sum_{i,j=1}^{m} h_{ij} w_i w_j,$$

onde os $w_i (1 \le i \le m)$ são 1-formas diferenciais linearmente independentes em $\mathbb{R}^{m+1}$ dependendo dm m variáveis; e $h_{ij} = h_{ji}$ são funções destas m variáveis. Então uma condição necessária e suficiente para uma hipersuperfície existir em $\mathbb{R}^{m+1}$ com I e II como sua primeira e segunda formas fundamentais é: I e II satisfazem as equações de Gauss-Codazzi, onde Γ_{ijk} é a conexão de Levi-Civita determinada por I, e R_{ijkl} é o tensor curvatura correspondente. Além disso quaisquer tais duas hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{m+1}$ estão relacionadas por um movimento rígido.