INTRODUÇÃO À TEORIA DE REPRESENTAÇÕES

Aluno: Luan Pereira Bezerra
bezerra.luan@gmail.com

Orientador: Adriano Adrega de Moura
aamoura@ime.unicamp.br

IMECC
PICME/CNPq

Palavras-Chave: Álgebras de Lie - Sistemas de raízes - Teoria de Representações

Introdução

A definição de sistemas de raízes é bastante elementar, apenas um conjunto de vetores de um espaço euclidiano satisfazendo algumas propriedades. Entretanto, tal estrutura é fundamental na classificação de estruturas muito mais ricas. Neste trabalho vamos classificar as álgebras de Lie semissimples sobre $\mathbb{C}$ e representações de quivers de tipo finito utilizando essa ferramenta.

Sistemas de Raízes

Definição 1. *Seja E um espaço euclidiano de dimensão n. Um subconjunto $\Phi \subset E\backslash\{0\}$ é um sistema de raízes se:*

i) Φ é finito e gera E;

ii) Se $\alpha \in \Phi$, os únicos múltiplos de $\alpha \in \Phi$ são $c = \pm\alpha$;

iii) Se $\sigma_\alpha : E \to E$, $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$, então $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$, $\forall\, \alpha, \beta \in \Phi$;

iv) Se $\alpha, \beta \in \Phi$, então $2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Definição 2. *Um subconjunto Δ de Φ é dito uma base se:*

i) Δ é base de E;

ii) Cada raiz β pode ser escrita como $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$, com $k_\alpha \in \mathbb{Z}^+, \forall\, \alpha \in \Delta$ (β é positiva) ou $k_\alpha \in \mathbb{Z}^-, \forall\, \alpha \in \Delta$ (β é negativa).

As raízes em Δ são ditas simples.

Definição 3. *Uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é dita uma matriz de Cartan se:*

i) $a_{ii} = 2$;

ii) $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, se $i \neq j$;

iii) $a_{ij} = 0$, se e somente se $a_{ji} = 0$;

iv) $a_{ij}a_{ji} \leq 3$, se $i \neq j$.

Proposição 4. *Dada uma base Δ, fixe uma ordem nas raízes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Defina*

$$a_{ij} = 2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}.$$

A matriz cujas entradas são os inteiros a_{ij} é uma matriz de Cartan (Matriz de Cartan de Φ).

Pode-se provar que a base Δ é única, a menos de transformação ortogonal. Assim, a matriz de Cartan determina Φ, a menos de isomorfismo.

Definição 5. *Sejam $\Delta \subset \Phi$ uma base e A sua matriz de Cartan. O diagrama de Dynkin de Φ é um grafo construído como:*

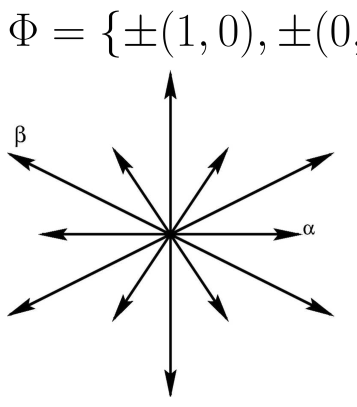
i) Para cada $\alpha_i \in \Delta$ construa um vértice.

ii) Entre cada par de raízes α_i, α_j desenhe $a_{ij}a_{ji}$ arestas.

iii) Se $a_{ij}a_{ji} > 1$ e $| a_{ij} |>| a_{ji} |$, desenhe uma seta apontando para α_j.

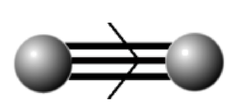
Exemplo 6. *Considere o sistema de raízes*

$\Phi = \{\pm(1,0), \pm(0,1), \pm(2,1), \pm(3,2), \pm(1,1), \pm(3,1)\}$



Matriz de Cartan: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Diagrama de Dynkin G2:

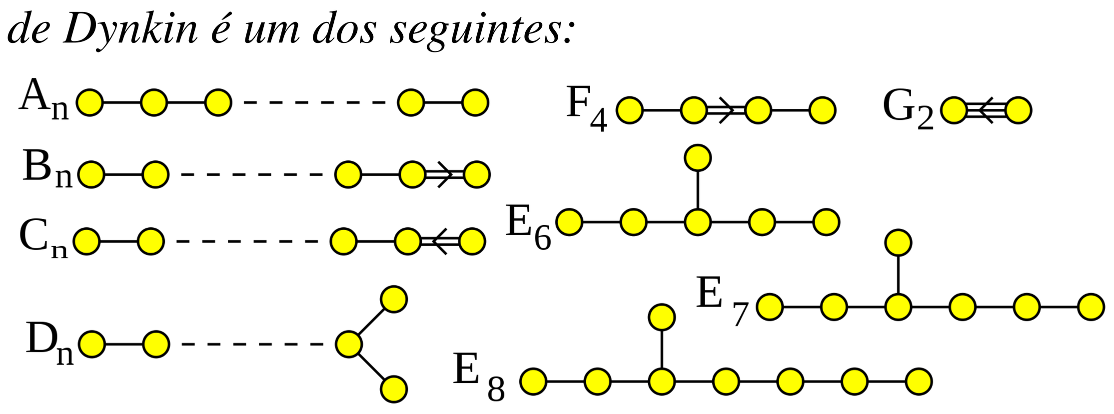


Definição 7. *Um sistema de raízes Φ é irredutível se o seu diagrama de Dynkin é conexo; Caso contrário, Φ é redutível.*

Proposição 8. *Seja E um espaço euclidiano e Φ um sistema de raízes. Então E se decompõe, de maneira única, como $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$, com E_i ortogonal a $E_j, (i \neq j)$ e $\Phi = \Phi_1 \sqcup \ldots \sqcup \Phi_n$, onde Φ_i é irredutível.*

Os diagramas de Dynkin de $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ são as componentes conexas do diagrama de Φ. Assim, basta classificar os diagramas conexos e daí obtêm-se todos os diagramas de Dynkin possíveis de um sistema de raízes.

Teorema 9. *(Classificação de diagramas de Dynkin) Seja Φ um sistema irredutível de raízes. Então, seu diagrama de Dynkin é um dos seguintes:*



Álgebras de Lie

Todas as álgebras de Lie aqui consideradas serão sobre $\mathbb{C}$.

Definição 10. *Uma álgebra de Lie (complexa) é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ munido de uma operação binária $[-,-] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz:*

i) $[-,-]$ é bilinear;

ii) $[x,x] = 0,\ \forall\, x \in \mathfrak{g}$;

iii) $[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0,\ \forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Definição 11. *Seja $\mathfrak{h}$ um subespaço de $\mathfrak{g}$. Então $\mathfrak{h}$ é dito um ideal de $\mathfrak{g}$ se $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$*

Definição 12. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita simples, se $\mathfrak{g}$ possui apenas dois ideais, $\mathfrak{g}$ e **0**, e $dim(\mathfrak{g}) > 1$. E semissimples se*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_i,\ \mathfrak{g}_i \text{ simples e } [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0, \forall i \neq j.$$

Definição 13. *A aplicação $ad(x) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, definida por $ad(x)y = [x,y]$, é chamada adjunta de $x, \forall x \in \mathfrak{g}$.*

Teorema 14. *Seja $\mathfrak{g}$ semissimples. Então existe subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que:*

i) $ad(x)$ é diagonalizável $\forall x \in \mathfrak{h}$ ($\mathfrak{h}$ é toral).

ii) Se $\mathfrak{h}'$ é subálgebra satisfazendo i) e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}'$, então $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ ($\mathfrak{h}$ é maximal).

Agora, fixe uma subálgebra $\mathfrak{h}$ como acima, e dado $\mu \in \mathfrak{h}^*$, defina $\mathfrak{g}_\mu = \{x \in \mathfrak{g} : ad(h)(x) = \mu(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Assim, temos a seguinte decomposição:

Teorema 15.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

e $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ é chamado de sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ associado a $\mathfrak{h}$.

Definição 16. *A forma $k(-,-) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por $k(x,y) = tr(ad(x)ad(y))$, é chamada de forma de Killing.*

A forma de Killing é bilinear, simétrica e, se restrita à $\mathfrak{h}$, é não degenerada. Assim, podemos identificar $\mathfrak{h}$ com $\mathfrak{h}^*$ ($\alpha \in \mathfrak{h}^*$ com o único $t_\alpha \in \mathfrak{h}$, tal que $\alpha(h) = k(t_\alpha, h),\ \forall\ h \in \mathfrak{h}$). Definimos então uma forma em $\mathfrak{h}^*$ dada por $(\alpha, \beta) = k(t_\alpha, t_\beta)$.

Teorema 17. *Considere o espaço $E_{\mathbb{Q}}$ gerado pelo sistema de raízes Φ sobre $\mathbb{Q}$.*

i) $(-,-)$ é um produto interno em $E_{\mathbb{Q}}$;

ii) O espaço $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$, com o produto interno induzido por $(-,-)$, é um espaço euclidiano;

*iii) Φ é um sistema de raízes em E no sentido da **Definição 1**.*

Teorema 18. *(Classificação de álgebras de Lie semissimples.)*

i) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e sejam $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ subálgebras maximais torais com sistemas de raízes Φ_1 e Φ_2. Então, os diagramas de Dynkin correspondentes a Φ_1 e Φ_2 são iguais.

ii) Duas álgebras de Lie são isomorfas, se e somente se seus diagramas de Dynkin são iguais.

iii) O diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$ é conexo, se e somente se $\mathfrak{g}$ é simples.

iv) Se $\mathfrak{g}$ é semissimples e $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$, com $\mathfrak{g}_i$ simples. Então, o diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$ é a união dos diagramas de $\mathfrak{g}_i$.

Teorema 19. *(Serre) Fixe um sistema de raízes Φ, com base $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ dada por geradores x_i^+, x_i^-, h_i, $1 \leq i \leq l$ e relações:*

i) $[h_i, h_j] = 0$;

ii) $[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij}h_j$;

*iii) $[h_i, x_j^{\pm}] = \pm a_{ji}x_j^{\pm}$, ($a_{ji}$ como na **Proposição 4**);*

iv) $(ad(x_i^{\pm}))^{(1-a_{ji})}(x_j^{\pm}) = 0$ se $i \neq j$.

Então, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita e o subespaço $\mathfrak{h}$ gerado pelos h_i é uma subálgebra toral maximal com sistema de raízes isomorfo a Φ.

Quivers

Definição 20. *Um quiver é um grafo finito orientado. Em outras palavras, um quiver Q é um par (Q_0, Q_1), onde Q_0 é um conjunto finito de vértices e Q_1 é um conjunto finito de flechas entre seus vértices, juntamente com duas operações α e ω definidas em Q_1 da seguinte forma:*

Se f é uma flecha do vértice v_1 para o vértice v_2, $\alpha(f) = v_1$ e $\omega(f) = v_2$.

Definição 21. *Uma representação $\boldsymbol{V} = (V_i, T_k)$ de um quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ é uma família de espaços vetoriais V_i, com $i \in Q_0$, e uma família de transformações lineares $T_k : V_{\alpha(k)} \longrightarrow V_{\omega(k)}$, com $k \in Q_1$.*

*Uma representação é de dimensão finita, se todos os V_i's são de dimensão finita. Neste caso, definimos o vetor dimensão de **V** por $d_{\boldsymbol{V}} = (dimV_i)_{i\in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$*

Definição 22. *A soma direta de duas representações $\boldsymbol{V} = (V_i, T_k)$ e $\boldsymbol{W} = (W_i, S_k)$ é a representação $V \oplus W = (V_i \oplus W_i, T_k \oplus S_k)$.*

Definição 23. *Uma representação **V** de um quiver Q é dita indecomponível, se **V** não é soma direta de representações não triviais.*

Um quiver Q é de tipo finito, se Q possui um número finito de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis.

Teorema 24. *(Teorema de Gabriel, Parte 1) Um quiver Q é de tipo finito, se e somente se o grafo associado a Q (i.e., o quiver sem direções) é um diagrama de Dynkin de tipo ADE.*

Seja Q um quiver de tipo ADE com n vértices e seja A_Q a respectiva matriz de Cartan. Defina em $\mathbb{R}^n$ um produto interno dado por

$$B(x,y) = x^T A_Q y.$$

Um vetor x em $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito uma raiz, se $B(x,x) = 2$.

Proposição 25. *O conjunto Φ de todas as raízes em $\mathbb{Z}^n$ é um sistema de raízes no sentido da **Definição 1**. Além disso, a base canônica $\Delta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ é uma base no sentido da **Definição 2**.*

Teorema 26. *(Teorema de Gabriel, Parte 2) O vetor dimensão de qualquer representação indecomponível de Q é uma raiz positiva (rel. a Δ) e, para qualquer raiz positiva α, existe uma representação indecomponível de Q com vetor dimensão α.*

Conclusão

Pelo **Teorema 18** e **Teorema 19** mostramos que existe bijeção entre as classes de isomorfismo de álgebras de Lie simples e os diagramas de Dynkin do **Teorema 9**. No caso dos quivers, o **Teorema de Gabriel** fornece uma bijeção entre os quivers de tipo finito e os diagramas ADE e também entre os vetores dimensão e as raízes positivas.

Na **Definição 3**, se desconsiderarmos o item iv, obtemos uma *Matriz de Cartan Generalizada - MCG*. Seja C uma MCG, se existe uma matriz diagonal com entradas inteiras S tal que SC é simétrica, dizemos que C é simetrizável. Neste caso, utilizando os geradores e relações do **Teorema 19**, podemos construir uma nova estrutura, chamada de álgebra de Kac-Moody (possivelmente de dimensão infinita) e intimamente relacionada com física teórica, em particular com teoria conforme de campos.

A continuação deste trabalho será estudar representações de álgebras de Kac-Moody.

Referências

[1] P. Etingof et al, Introduction to representation theory, AMS (2011).

[2] J. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer (1972).

[3] R. Carter, Lie algebras of finite and affine type, Cambridge University Press (2005).

[4] L. San Martin, Álgebras de Lie, Editora da Unicamp (1999).